19/12/16

3η Κατηγορία

Επιφάνειες Εφαπτομένων

Θεωρώ κανονική καμπύλη $c: I \to \mathbb{R}^3$ $t \in I$

Ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $x: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$x(t,v) = c(t) + v c'(t)$$

Η x καλείται επιφάνεια εφαπτομένων της c.

Ελέγχω για κανονικότητα

$$x_t(t,v) = c'(t) + v c''(t)$$
$$x_v(t,v) = c'(t)$$

$$x_t \times x_v (t,v) = c'(t) + v c''(t) \times c'(t) =$$
$$= v c''(t) \times c'(t)$$

Η x δεν είναι κανονική στα σημεία $x(t,0) = c(t)$

$$k(t) = \frac{\| c'(t) \times c''(t) \|}{\| c'(t) \|^3}$$

Συμπέρασμα

Η x είναι κανονική για $v \neq 0$ και αν $k(t) > 0$

Το μοναδιαίο κάθετο είναι $N(t,v) = \dfrac{x_t \times x_v}{\| x_t \times x_v \|}(t,v)$

$$\Rightarrow N(t,v) = \pm \frac{c'(t) \times c''(t)}{\| c'(t) \times c''(t) \|} \rightarrow$$

$N(t,v) = \pm \vec{b}(t)$ (δευτερεύον κάθετο)

Τα θεμελιώδη ποσά $2^{ας}$ τάξης είναι:

$$e = \langle x_{tt}, N \rangle = \langle c''(t) + v\,c'''(t), \pm \vec{b}(t) \rangle$$

$$= \dots$$

$$f = \langle x_{tv}, N \rangle = \langle c''(t), \pm \vec{b}(t) \rangle = 0$$

$$g = \langle x_{vv}, N \rangle = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0$$

Δεν έχουν όλες οι επιφάνειες $K=0$

πχ Το μονόχωνο υπερβολοειδές έχει παντού $K<0$

Το μοναδιαίο κάθετο μένει σταθερό κατά γενέτειρα,
Αλλά αλλάζει γενέτειρα, αλλάζει.

Ερώτημα

Οι κυλινδρικές, κωνικές και επιφάνειες εφαπτομένων, έχουν καμπυλότητα Gauss $K=0$. Είναι οι μόνες επιφάνειες με καμπυλότητα Gauss $K=0$?

Απάντηση

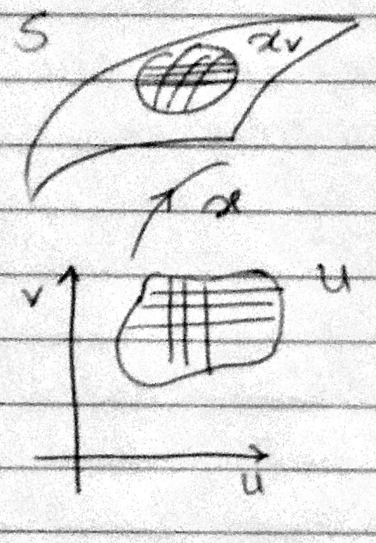
Παρατήρηση

Τα σημεία μιας επιφάνειας με $K=0$ είναι είτε παραβολικά είτε επίπεδα

Υπόθεση

Έστω S επιφάνεια, της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά

Υποθέτω ότι $k_1 > 0$ και $k_2 = 0$



Σύμφωνα με το θεώρημα γύρω από κάθε σημείο υπάρχει σύστημα γραμμών καμπυλότητας $x: U \to S$

Αυτό ότι x_u, x_v είναι κύριες διευθύνσεις χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι

$$\left.\begin{array}{ll} dN x_u = k_1 x_u, & dN x_v = 0 \\ dN x_u = -N_u, & dN x_v = -N_v \end{array}\right\} \Rightarrow N_v = 0$$

$N_v = 0 \Rightarrow N(u,v)$ ανεξάρτητο του u.
Αυτό σημαίνει ότι το N παραμένει σταθερό κατά μήκος κάθε παραμ. καμπύλης $x(u = σταθ, v)$

Γνωρίζω ότι $f = 0$

$f = \langle x_{uv}, N \rangle = -\langle x_u, N_v \rangle = -\langle x_v, N_u \rangle$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x_v, N_u \rangle = 0} \qquad \left.\begin{array}{l} x_v \perp N \\ \Rightarrow x_v \perp N_u \end{array}\right\} (1)$$

N_u ; ανεξάρτητο του v

$\Rightarrow (1)$: $x_v \parallel N \times N_u$ = ανεξάρτητο του u, δηλαδή παραμένει σταθερό κατά μήκος των παραμετρικών καμπυλών $x(u = σταθ, v)$

(Δεν έχει αυτό λυθεί με ακρίβεια)

Η $x(u=\text{σταθ}, v)$ έχει διάνυσμα εφαπτόμενης // προς σταθ διάνυσμα $\neq 0$

Άσκηση $\Longrightarrow$ Η $x(u=\text{σταθ}, v)$ είναι ευθεία (ή τμήμα ευθείας)

Θεώρημα

Κάθε επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι παραβολικά (Προσοχή! Δεν ισχύει για $k_1=k_2$) είναι ευθειογενής.

$\boxed{\text{Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα}}$

Επιπλέον το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας παραμένει σταθερό κατά μήκος κάθε γενέτειρας.

Αναπτυκτές επιφάνειες

Ορισμός

Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή $\Longleftrightarrow$ i) είναι ευθειογενής και ii) το εφαπτόμενο επίπεδο παραμένει σταθ. κατά μήκος κάθε γενέτειρας.

Θεώρημα

Κάθε επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$ χωρίς επίπεδο σημείο είναι αναπτυκτή.

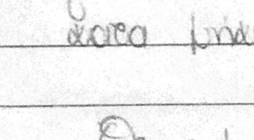
$\Updownarrow$ το ένα ~~δεν~~ είναι αντίστροφο του άλλου

Θεώρημα

Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια, έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$

Απόδειξη

Έστω $c(s)$ γενέτειρα της S με παράμετρο το μήκος τόξου s



Η $c(s)$ είναι ασυμπτωτική καμπύλη, δηλ. $k_n(\dot{c}(s))=0 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{II}_{c(s)}(\dot{c}(s))=0$$

Επειδή η S είναι αναπτυκτή έχω $(N\circ c)^{\cdot}(s)=0$

Η τρίτη θεμελιώδης μορφή $\mathrm{III}_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{III}_p(w) = \langle A_p w, A_p w\rangle \overset{A_p = -dW_p}{=} \langle dN_p(w), dN_p(w)\rangle$$

$$\mathrm{III}_{c(s)}(\dot{c}(s)) = \langle dN_{c(s)}(\dot{c}(s)), dN_{c(s)}(\dot{c}(s))\rangle$$

$$= \langle (N\circ c)^{\cdot}(s), (N\circ c)^{\cdot}(s)\rangle \Rightarrow \mathrm{III}_{c(s)}(\dot{c}(s))=0$$

Έχω

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0$$

$$\underbrace{\mathrm{III}_{c(s)}(\dot{c}(s))}_{} - 2H(c(s))\,\underbrace{\mathrm{II}_{c(s)}(\dot{c}(s))}_{} + K(c(s))\,\underbrace{\mathrm{I}_{c(s)}(\dot{c}(s))}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow K(c(s))=0 \Rightarrow K=0$$

Πόρισμα

Μια επιφάνεια με $K\neq 0$ δεν είναι αναπτυκτή.

Παραδείγματα αναπτυκτών επιφανειών

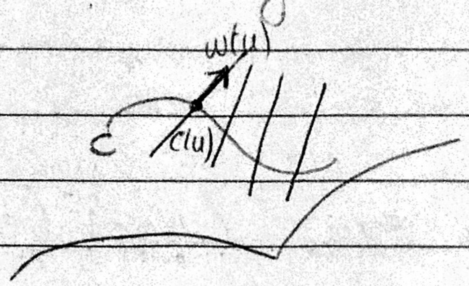
- Κυλινδρικές
- Κωνικές
- Εφαπτομενικές

} Επιφάνειες

Ερώτηση

Είναι οι λείες αναπτυκτές επιφάνειες?

Έστω S ευθειογενής επιφάνεια.



$\{c'(u), \omega(u)\}$ γρ. ανεξ.

Θεωρώ καμπύλη $c: I \to S$ με παράμετρο u εγκάρσια στις γεννήτορες και διαφορίσιμη συνάρτηση $\omega: I \to \mathbb{R}^3$ με $\|\omega(u)\| = 1$

με $\|\omega(u)\| = 0$ και $\omega(u)$ να είναι // γεννήτορα που διέρχεται από το $c(u)$

$$x(u,v) = c(u) + v\,\omega(u)$$

$$x: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$$

Είναι η x κανονική παραμετρική επιφάνεια?

$$x_u(u,v) = c'(u) + v\,\omega'(u)$$

$$x_v(u,v) = \omega(u)$$

$$x_u \times x_v(u,v) = \left(c'(u) + v\,\omega'(u)\right) \times \omega(u) = (1)$$

$$x_u \times x_v(u,0) = c'(u) \times \omega(u) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Η x τοπικά είναι κανονική

$$(1) = c'(u) \times \omega(u) + v\,\omega'(u) \times \omega(u)$$

$$N(u,v) = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}(u,v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(u,v) = \frac{c'(u) \times \omega(u) + v\,\omega'(u) \times \omega(u)}{\|c'(u) \times \omega(u) + v\,\omega'(u) \times \omega(u)\|}$$

Θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης

$$e = \langle x_{uu}, N \rangle$$

$$f = \langle x_{uv}, N \rangle = \left\langle c'(u), \frac{c'(u) \times w(u) + v\, w'(u) \times w(u)}{\| \ldots \|} \right\rangle$$

μεικτό γινόμενο

$$f = \frac{u \langle c'(u), w'(u) \times w(u) \rangle}{\| \ldots \|} = \frac{u\, [w', w, c']}{\| \ldots \|}$$

$$g = \langle x_{vv}, N \rangle = 0$$

Αν η S είναι αναπτυκτή $\Rightarrow K = 0 \Rightarrow$

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \Rightarrow f = 0$$

<u>Συμπέρασμα</u>

Αν $x(u,v) = c(u) + u\,w(u)$, $\|w(u)\| = 1$

$c'(u) \times w(u) = 0$ είναι αναπτυκτή

$\Rightarrow [w', w, c'] = 0$

<u>Εξετάζω το αντίστροφο του κριτηρίου με το μεικτό γινόμενο</u>

Αντίστροφα, έστω ότι $[w', w, c'] = 0 \Rightarrow w' \perp w \times c'$

$\langle w, w \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle w, w' \rangle = 0 \Rightarrow w' \perp w$

$$\Rightarrow w' \parallel (w \times c') \times w = \langle w, w \rangle c' - \langle w, c' \rangle w$$

$$w' = \lambda (c' - \langle w, c' \rangle w)$$

$$N(u,v) = \frac{c'(u) \times w(u) + v\lambda (c' - \langle w, c' \rangle w) \times w}{\| \ldots \|}$$

$$= \frac{c'(u) \times w(u) + v\lambda\, c'(u) \times w(u)}{\| \ldots \|}$$

$$= \frac{(1 + v\lambda(u))\, c'(u) \times w(u)}{|1 + v\lambda(u)|\, \|c'(u) \times w(u)\|}$$

Πρόταση

Έστω η ευθειογενής επιφάνεια $x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ όπου $\|w(u)\| = 1$ και $c'(u) \times w'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$

Η x είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow [w'(u),\ w(u),\ c'(u)] = 0$